ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199
УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ КОШИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© **А. С. Баландин**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: balandin-anton@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа. Для данного уравнения выведены формулы, связывающие фундаментальное решение и функцию Коши, на основе которых исследуется асимптотическое поведение решений указанного уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; уравнение нейтрального типа; фундаментальное решение; функция Коши; асимптотическое поведение

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = N \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\Delta = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 \colon t \geqslant s\right\}$, χ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}_+$, $C[0,l]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,l]$ функций.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\left(t - h_j\right) = \int_0^{\omega} x(t-s)\, dr(s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{0.1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $J \in \mathbb{N}$, $a_j = const \in \mathbb{C}$, $h_j = const \in \mathbb{R}_+$, функция $r \colon [0,\omega] \to \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, функция $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ суммируема на каждом конечном отрезке. При отрицательном значении аргумента x и $\dot{x}$ доопределим начальными функциями φ и ψ, не зависящими друг от друга; требования «непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$ и $\dot{x}(0) = \psi(0)$ также не считаются обязательными. Функция $\int_t^{\omega} \varphi(t-s)\, dr(s)$ суммируема на $[0,\omega]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Заметим, что при $t \in [0,\omega]$ уравнение (0.1) понимается следующим образом:

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\,(t-h_j) = \int_0^t x(t-s)\,dr(s) + f(t) + f_\varphi(t), \quad f_\varphi(t) = \int_t^\omega \varphi(t-s)\,dr(s).$$

Следуя [1], сделаем замену переменных, которая дает возможность отнести начальные функции к внешнему возмущению f. Это позволяет считать, что на отрицательной полуоси обе функции, x и $\dot{x}$, доопределены нулем.

Под *решением* уравнения (0.1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую (0.1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (0.1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{0.2}$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ называется *фундаментальным решением*, а $C\colon \Delta \to \mathbb{C}$ — *функцией Коши* уравнения (0.1). Удобно доопределить нулем фундаментальное решение на отрицательной полуоси, а функцию Коши вне множества Δ.

При исследовании асимптотических свойств основное внимание уделим функции Коши, поскольку, как будет показано далее, из экспоненциальной оценки на функцию Коши следует экспоненциальная оценка на фундаментальное решение.

Для автономного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, между его фундаментальным решением и функцией Коши существует простая зависимость ([2], с. 116):

$$C(t,s) = X(t-s). \tag{0.3}$$

Равенство (0.3) упрощает исследование неоднородных уравнений, сводя любую задачу к изучению соответствующих свойств функции X. Как показывают простые примеры [3], для уравнений нейтрального типа формула (0.3) неверна и вопрос о связи между фундаментальным решением и функцией Коши был и остается одним из важнейших (см., напр., [1], с. 83–84). Существенное продвижение в этом вопросе было достигнуто в работе [3], где для уравнения с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j \dot{x}(t-jh) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-mh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{0.4}$$

методом производящих функций была получена формула, связывающая фундаментальное решение и функцию Коши. Как и ожидалось, эта формула позволила преодолеть ряд трудностей, возникающих при исследовании асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно производной (см. работы [4]; [5]; [6], с. 177–178, 512–513). Цель настоящей работы — обобщить результаты работы [3] на уравнение (0.1): найти связь между фундаментальным решением и функцией Коши, и на ее основе изучить асимптотическое поведение всех решений уравнения.

1. Вспомогательные утверждения

«Функцией скачков» будем называть кусочно-постоянную функцию, имеющую конечное количество скачков (разрывов первого рода) на каждом конечном отрезке в фиксированных точках и непрерывную слева. Пусть $[0, l]$ — произвольный отрезок, $P[0, l]$ — пространство функций, представимых в виде суммы непрерывной на $[0, l]$ функции и функции скачков. Очевидно, что $P[0, l]$ является линейным пространством с естественными операциями сложения и умножения на число.

Определим операторы S, A, C, R по следующим правилам:

$$(Sy)(t) = \sum_{j=1}^{J} a_j y(t - h_j), \quad (Ay)(t) = \int_0^\omega y(t - s)\, dr(s),$$
$$(Cy)(t) = \int_0^t y(s)\, ds, \quad (Ry)(t) = \int_0^\omega y(t - s) r(s)\, ds.$$

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде (с учетом договоренностей из Введения):

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) = (Ax)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

Далее вместо уравнения (0.1) будем использовать эквивалентный вид (1.1).

Области определения и множества значений операторов S, A, C, R характеризуются следующим утверждением.

Утверждение 1.1. *Операторы S, A, C, R действуют в следующих пространствах: $S\colon P[0, l] \to P[0, l]$, $A\colon C[0, l] \to P[0, l]$, $C, R\colon P[0, l] \to C[0, l]$.*

Зафиксируем произвольное $\alpha \in \mathbb{R}$ и введем норму в пространстве $P[0, l]$

$$\|x\|_\alpha = \sup_{t \in [0, l]} \left| x(t) e^{-\alpha t} \right|.$$

Покажем, что операторы S, A, C и R ограничены:

$$\|Sy\|_\alpha \leqslant \left(\sum_{j=1}^{J} |a_j| e^{-\alpha h_j} \right) \|y\|_\alpha, \quad \|Ay\|_\alpha \leqslant \left(\int_0^\omega e^{-\alpha s} |dr(s)| \right) \|y\|_\alpha,$$
$$\|Cy\|_\alpha \leqslant \sup_{t \in [0, l]} \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, ds \right) \|y\|_\alpha = \sup_{t \in [0, l]} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \|y\|_\alpha,$$
$$\|Ry\|_\alpha \leqslant \sup_{t \in [0, l]} \left(\int_0^\omega e^{-\alpha s} r(s)\, ds \right) \|y\|_\alpha = \sup_{t \in [0, \omega]} |r(t)| \sup_{t \in [0, l]} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \|y\|_\alpha.$$

Для норм операторов, действующих из $(P[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$ в себя, будем использовать обозначение $\|\cdot\|$. Отметим, что выбор величины α позволяет манипулировать величиной нормы операторов R, C, т.к. при $\alpha \to +\infty$ нормы $\|R\|, \|C\| \to 0$.

Несложно убедиться, что пространство $(P[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$ является банаховым.

В разделах 2 и 3 нам понадобится следующая известная теорема об обратном операторе (см., [7, с. 224–230]). Через E здесь и далее будем обозначать тождественный оператор.

Утверждение 1.2. *Пусть* $\mathcal{B}$ *— банахово пространство,* $T\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ *— линейный ограниченный оператор, причем* $\|T\|<1$. *Тогда существует линейный ограниченный оператор* $(E-T)^{-1}\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}$, *и при любом* $f\in\mathcal{B}$ *уравнение* $z=Tz+f$ *имеет в* $\mathcal{B}$ *единственное решение* $z=(E-T)^{-1}f$.

2. Фундаментальное решение

Из формулы (0.2) следует, что функция X определяется как решение следующего уравнения

$$\dot{x}(t)-(S\dot{x})(t)=(Ax)(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

дополненного начальным условием $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=1$.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Функция* $\dot{X}\in P[0,l]$ *при любом* l.
2. *Существуют* $\alpha\in\mathbb{R}$, $N_1,N_2\in\mathbb{R}_+$, *такие что при любом* $t\in\mathbb{R}_+$

   а) $|X(t)|\leqslant N_1e^{\alpha t}$*;*

   б) $|\dot{X}(t)|\leqslant N_2e^{\alpha t}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим (2.1) на отрезке $[0,l]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B=E+S+\ldots+S^{k_0}$, где $k_0h_{\min}<l$, $(k_0+1)h_{\min}>l$, и учтем, что $\left(S^{(k_0+1)h_{\min}}\dot{X}\right)(t)\equiv 0$:

$$\dot{x}(t)=((BA)X)(t). \tag{2.2}$$

Утверждение 1 леммы следует из (2.2) и утверждения 1.1.

Подействуем на обе части уравнения (2.2) оператором C (то есть проинтегрируем обе части уравнения):

$$X(t)=X(0)+((CBA)X)(t). \tag{2.3}$$

Заметим, что $CBA\colon C[0,l]\to C[0,l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|CBA\|<1$. В силу утверждения 1.2 получаем, что $X\in(C[0,l],\|\cdot\|_\alpha)$. Следовательно, $\|X\|_\alpha=N_1<\infty$, где N_1 не зависит от l. Значит, $|X(t)|\leqslant N_1e^{\alpha t}$.

В силу уравнения (2.2) и $|X(t)|\leqslant N_1e^{\alpha t}$, получаем, $|\dot{X}(t)|\leqslant N_2e^{\alpha t}$. □

Из уравнения (2.1), леммы 2.1 следует, что к уравнению (2.1) применимо преобразование Лапласа [6, с. 12, 18].

Обозначим

$$S(p)=\sum_{j=1}^{J}a_je^{-ph_j},\quad A(p)=\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi),\quad g(p)=p(1-S(p))-A(p),\quad p\in\mathbb{C}.$$

Лемма 2.2. *Лаплас-образ фундаментального решения имеет вид* $L_X(p)=\frac{1-S(p)}{g(p)}$, $\operatorname{Re}p\geqslant\alpha$.

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (2.1) и найдем функцию L_X из полученного уравнения. Лаплас-образ функции X определен на множестве $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$ в силу установленной выше оценки $|X(t)| \leqslant N_1 e^{\alpha t}$. □

Замечание 2.1. Функция L_X является мероморфной функцией. Как известно [9, с. 58], мероморфные функции имеют не более чем счетное число изолированных особенностей, которые являются нулями знаменателя. Значит, функция L_X может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением этих точек.

3. Функция Коши

Как показано в ([1], с. 61), функция Коши уравнения (0.1), как функция второго аргумента (при фиксированном t) при почти всех $s \leqslant t$ удовлетворяет равенству

$$C(t,s) = 1 + \sum_{j=1}^{J} a_j C(t, s+h_j) - \int_0^{\omega} C(t, \tau + s) r(\tau)\, d\tau. \tag{3.1}$$

В той же работе установлено, что (3.1) однозначно определяет функцию Коши уравнения (0.1) и может быть принято за ее определение. Напомним, что $C(t,s) \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R}^2_+ \setminus \Delta$.

Рассмотрим аналог уравнения (3.1) для функции одной переменной:

$$Y(t) = 1 + (SY)(t) - (RY)(t), \tag{3.2}$$

где функция Y предполагается равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Уравнение* (3.2) *однозначно разрешимо в* $P[0,l]$ *при любом* l.
2. *Существуют* $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{R}_+$, *такие что при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ $|Y(t)| \leqslant N e^{\alpha t}$.

Доказательство. Заметим, что если $(RY)(t)$ существует, то является локально абсолютно непрерывной функцией на любом конечном отрезке.

Рассмотрим (3.2) на отрезке $[0,l]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B = E + S + \ldots + S^{k_0}$, где $k_0 h_{\min} < l$, $(k_0+1)h_{\min} > l$, и, учитывая $\left(S^{(k_0+1)h_{\min}} Y\right)(t) \equiv 0$, получаем:

$$Y(t) = (BR)Y(t).$$

Заметим, что $BR\colon P[0,l] \to P[0,l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|BR\| < 1$. В силу утверждения 1.2 получаем, что $Y \in (P[0,l], \|\cdot\|_\alpha)$, то есть утверждение 1 леммы доказано. Отсюда вытекает, что $\|Y\|_\alpha = N < \infty$, где N не зависит от l. Значит, $|Y(t)| \leqslant N e^{\alpha t}$, тем самым доказано утверждение 2 леммы. □

Лемма 3.2. $C(t,s) = Y(t-s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $Y(t-s)$ удовлетворяет уравнению (3.1), которое как отмечалось выше, однозначно определяет функцию Коши. $\square$

Лемма 3.3. *Лаплас-образ функции* Y *имеет вид* $L_Y(p) = \frac{1}{g(p)}$, $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (3.2) и найдем функцию L_Y из полученного уравнения. Лаплас-образ функции Y определен на множестве $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$ в силу установленной выше оценки $|Y(t)| \leqslant Ne^{\alpha t}$. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Функция L_Y имеет не более чем счетное число полюсов, являющихся нулями знаменателя (и только ими). Значит, функция L_Y может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением этих точек.

4. Связь между фундаментальным решением и функцией Коши

Следующие теоремы устанавливают связь между функцией Коши и фундаментальным решением, а также их Лаплас-образами.

Из лемм 2.2 и 3.3 очевидным образом следует

Теорема 4.1. $L_X(p) = (1 - S(p))L_Y(p)$, $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$.

Теорема 4.2. *Пусть* X *— фундаментальное решение, а* Y *— решение уравнения* (3.2). *Тогда*

$$X(t) = (E - S)Y(t), \tag{4.1}$$

$$X(t) = 1 - (RY)(t). \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.1) получается, если к правой и левой частям равенства из теоремы 4.1 применить обратное преобразование Лапласа и использовать его элементарные свойства [6, гл. 1]. Из (3.2) и (4.1) следует (4.2). $\square$

5. Асимптотическое поведение функции Коши

Далее нам понадобится следующий результат, являющийся следствием теоремы Кронекера [8, с. 41].

Утверждение 5.1 ([8, с. 44]). *Система неравенств*

$$|\nu_k t| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет решения (и притом сколь угодно большие) при любых $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}$ *и при любом* $\delta > 0$.

Лемма 5.1. *Пусть существует* $p_0 = x_0 + iy_0$, *для которого* $S(p_0) = 1$, *и существуют* $\lambda, M_1 > 0$, *такие что при* $\operatorname{Re} p \in [\operatorname{Re} p_0 - \lambda, \operatorname{Re} p_0 + \lambda]$ *функция* $\eta_1(p)$ *аналитическая и* $|\eta_1(p)| \leqslant M_1$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon \in (0, \lambda)$ *существует* $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *где* $p_k = x_0 + iy_k$, *и при* $k \geqslant k_0$ *в каждом круге* $|p_k - p| < \varepsilon$ *функция* $\eta(p) = 1 - S(p) + \frac{\eta_1(p)}{p}$ *имеет нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $1-S(p)$ аналитическая, ее нули изолированы. Поэтому можно взять достаточно малое $\varepsilon \in (0,\lambda)$, что в круге $|z|<\varepsilon$ функция $1-S(p_0+z)$ имеет единственный нуль, а на окружности $|z|=\varepsilon$ выполняется $|1-S(p_0+z)| \geqslant \mu > 0$.

Заметим, что существует такое $M_2>0$, что $\sum_{j=1}^{J}\left|a_j e^{h_j z} e^{h_j p_0}\right| \leqslant M_2$ при $|z|\leqslant\varepsilon$.

Далее выберем $\delta>0$ так, чтобы $\delta < \min\left\{\frac{\mu}{2M_2}, 1\right\}$.

В силу утверждения 5.1, для любого заданного $\delta>0$ система неравенств

$$|h_j(y-y_0)| < \delta \;(\operatorname{mod} 2\pi), \quad j=\overline{1,J},$$

будет иметь последовательность решений $\{y_k-y_0\}_{k\in\mathbb{N}}$, причем y_k сколь угодно большие. Полагаем $p_k = x_0+iy_k$.

Пусть $\zeta(z)=1-S(p_0+z)$, $\xi_k(z)=S(p_0+z)-S(p_k+z)+\frac{\eta_1(p_k+z)}{p_k+z}$, тогда $\eta(p_k+z)=\zeta(z)+\xi_k(z)$, $z\in\mathbb{C}$. При $|z|\leqslant\varepsilon$ имеем

$$\left|e^{h_j(p_k-p_0)}-1\right| = \left|e^{ih_j(y_k-y_0)}-1\right| \leqslant |h_j(y_k-y_0)| < \delta,$$

тогда

$$|S(p_0+z)-S(p_k+z)| = \left|\sum_{j=1}^{J} a_j e^{h_j z} e^{h_j p_0}\left(e^{h_j(p_k-p_0)}-1\right)\right| \leqslant M_2\delta < \frac{\mu}{2}.$$

Далее получаем

$$\left|\frac{\eta_1(p_k+z)}{p_k+z}\right| \leqslant \frac{M_1}{|p_k|-\varepsilon}.$$

Заметим, что найдется k_0 такое, что при всех $k\geqslant k_0$ справедливо $\frac{M_1}{|p_k|-\varepsilon} < \frac{\mu}{2}$. Итак, при $|z|=\varepsilon$ для всех $k\geqslant k_0$ выполняется $|\zeta(z)|\geqslant\mu>|\xi_k(z)|$. Значит, по теореме Руше функции $\zeta(z)$ и $\xi_k(z)$ при $|z|<\varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей. Следовательно, во всех кругах $|p_k-p|<\varepsilon$ при $k\geqslant k_0$ существуют точки, где $1-S(p)+\frac{\eta_1(p)}{p}=0$. □

Пусть $\eta_1(p)\equiv 0$. Тогда имеем

Следствие 5.1. *Пусть существует $p_0=x_0+iy_0$, для которого $S(p_0)=1$, тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ существует $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $p_k=x_0+iy_k$, и в каждом круге $|p_k-p|<\varepsilon$ функция $1-S(p)$ имеет нуль.*

Таким образом, любой из нулей функции $1-S(p)$ порождает вертикальную цепь нулей, то есть существует $c\in\mathbb{R}$, такое что для любого $\varepsilon>0$ в полосе $|\operatorname{Re} p-c|<\varepsilon$ существует бесконечное число нулей (со сколь угодно большой мнимой частью) функции $1-S(p)$.

Пусть $\eta_1(p)=-A(p)$. Тогда имеем

Следствие 5.2. *Пусть существует $p_0=x_0+iy_0$, для которого $S(p_0)=1$, тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ существует $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $p_k=x_0+iy_k$, и при $k\geqslant k_0$ в каждом круге $|p_k-p|<\varepsilon$ функция $g(p)$ имеет нуль.*

Сформулируем еще один важный результат.

Следствие 5.3. *Пусть все нули функции* g *лежат в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда все нули функции* $1 - S(p)$ *лежат в этой же полуплоскости.*

Доказательство. Допустим, что функция $1 - S(p)$ имеет хотя бы один нуль полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > \lambda\}$. Тогда, в силу следствия 5.2 и открытости полуплоскости P, в P найдутся нули функции g. □

Далее нам понадобится следующее утверждение. Приведем его в удобном для нас виде.

Утверждение 5.2 ([6, с. 438, теорема 12.6]). *Пусть* p_m — *нули* $1 - S(p)$, $\mathcal{M}$ — *такое множество, что* $\inf_m \inf_{p \in \mathcal{M}} |p - p_m| > 0$. *Тогда* $\inf_{p \in \mathcal{M}} |1 - S(p)| > 0$.

Лемма 5.2. *Пусть все нули функции* g *лежат в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant \lambda_1 - \varepsilon\}$ *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого* $\lambda_2 > \lambda_1$ *справедливо*

$$\lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_2 - iy} L_Y(p) e^{pt}\, dp \right| = 0, \qquad \lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} L_Y(p) e^{pt}\, dp \right| = 0.$$

Доказательство. Заметим, что при $\operatorname{Re} p \in [\lambda_1, \lambda_2]$ найдется $M_A > 0$, такое что $|A(p)| \leqslant M_A$. В силу следствия 5.3 и утверждения 5.1, в условиях леммы имеем $|1 - S(p)| \geqslant m_S > 0$. Тогда получаем

$$\lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} L_Y(p) e^{pt}\, dp \right| = \lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{e^{pt}}{p(1 - S(p)) - A(p)}\, dp \right| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{y \to +\infty} \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{|e^{pt}|}{|p||1 - S(p)| - |A(p)|}\, dp \leqslant e^{\lambda_2 t} \lim_{y \to +\infty} \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{dp}{|p| m_S - M_A} = 0.$$

Доказательство $\lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_2 - iy} L_Y(p) e^{pt}\, dp \right| = 0$ повторяет только что проведенное, если y заменить на $-y$. □

Лемма 5.3. *Пусть все нули функции* g *лежат в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого* $\lambda_1 > \lambda$ *справедливо*

$$\lim_{y \to +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} L_Y(p) e^{pt}\, dp \right| \leqslant M e^{\lambda_1 t}, \quad M > 0.$$

Доказательство. Возьмем α_0 таким, чтобы существовали нули функции g с вещественной частью большей α_0. Сделаем несколько преобразований, используя тот факт, что $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty}|S(p)|=0$, и абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}S^k(p)$:

$$\left|\lim_{y\to\infty}\int\limits_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}\frac{e^{pt}}{(p-\alpha_0)(1-S(p))}\,dp\right|=\left|\lim_{y\to\infty}\int\limits_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}\sum_{k=0}^{\infty}S^k(p)\frac{e^{pt}}{p-\alpha_0}\,dp\right|=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}S^k(p)\frac{e^{pt}}{p-\alpha_0}\,dp\right|=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_J=k}\frac{k!}{k_1!\ldots k_J!}\left(a_1^{k_1}\ldots a_J^{k_J}\right)\int\limits_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}e^{-p(h_1k_1+\ldots+h_Jk_J)}\frac{e^{pt}}{p-\alpha_0}\,dp\right|=$$

$$=e^{\alpha t}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_J=k}\frac{k!}{k_1!\ldots k_J!}\left(a_1^{k_1}\ldots a_J^{k_1}\right)\chi\left(t-h_1k_1-\ldots-h_Jk_J\right)e^{-\alpha_0(h_1k_1+\ldots+h_Jk_J)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{\alpha_0 t}}{|1-|a_1|e^{-\alpha_0h_1}-\ldots-|a_J|e^{-\alpha_0h_J}|}.$$

В силу следствия 5.3 и утверждения 5.2, в условиях леммы имеем $\left|\frac{A(p)}{1-S(p)}\right|\leqslant A_1<\infty$ и $\left|\frac{1}{1-S(p)}\right|\leqslant A_2<\infty$. Оценим

$$\left|\int_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}\frac{\left(\frac{A(p)}{1-S(p)}-\alpha_0\right)e^{pt}\,dp}{p(1-S(p))\left(p-\frac{A(p)}{1-S(p)}\right)}\right|\leqslant(A_1+|\alpha_0|)A_2e^{\lambda_1t}\int_{-y}^{y}\frac{dw}{\sqrt{\lambda_1^2+w^2}\left|\lambda_1+iw-\frac{A(\lambda_1+iw)}{1-S(\lambda_1+iw)}\right|}=$$

$$=(A_1+|\alpha_0|)A_2e^{\lambda_1t}\int_{-y}^{y}O\left(\frac{1}{w^2}\right)dw.$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to+\infty}\left|\int_{\lambda_1-iy}^{\lambda_1+iy}L_Y(p)e^{pt}\,dp\right|\leqslant\frac{e^{\alpha_0t}}{|1-a_1e^{-\alpha_0h_1}-\ldots-a_Je^{-\alpha_0h_J}|}+$$
$$+(A_1+|\alpha_0|)A_2e^{\lambda_1t}\lim_{y\to+\infty}\int_{-y}^{y}O\left(\frac{1}{w^2}\right)dw\leqslant Me^{\lambda_1t}.\quad\square$$

Теорема 5.1. *Функция Коши уравнения* (0.1) *имеет оценку*

$$|C(t,s)|\leqslant N_Ce^{\beta(t-s)},\quad N_C>0,\quad\beta\in\mathbb{R},\tag{5.1}$$

тогда и только тогда, когда нули функции g *лежат в полуплоскости* $\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p\leqslant\beta-\varepsilon\}$ *при некотором* $\varepsilon>0$.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что справедлива оценка (5.1). Значит, L_Y является аналитической функцией в полуплоскости $\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p>\beta\}$. Следовательно, нули функции g лежат только в полуплоскости $\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p\leqslant\beta-\varepsilon\}$.

Достаточность. Предположим, что все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant \beta - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник $ABCD$, вершины которого соответствуют точкам $\alpha - i\gamma$, $\alpha + i\gamma$, $\beta + i\gamma$, $\beta - i\gamma$, где α определяется леммой 2.1, причем $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$.

Разобьем интеграл $\int\limits_{ABCD} L_Y(p)e^{pt}\,dp$ на четыре интеграла:

$$I_1 = \int\limits_{AB} L_Y(p)e^{pt}\,dp, \quad I_2 = \int\limits_{BC} L_Y(p)e^{pt}\,dp, \quad I_3 = \int\limits_{CD} L_Y(p)e^{pt}\,dp, \quad I_4 = \int\limits_{DA} L_Y(p)e^{pt}\,dp.$$

Из теоремы Коши о вычетах [10, с. 79] следует, что $\int\limits_{ABCD} L_Y(p)e^{pt}\,dp = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. По лемме 5.2 $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_2| = 0$, $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_4| = 0$. По лемме 5.3 $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_3| \leqslant Me^{\beta t}$. С помощью обратного преобразования Лапласа получаем $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} I_1 = 2\pi i Y(t)$.

Таким образом, $2\pi|Y(t)| = \lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_1| \leqslant \lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_3| + \lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_2| + \lim\limits_{\gamma\to+\infty} |I_4| \leqslant Me^{\beta t}$, откуда получаем оценку (5.1). □

Легко видеть, что справедливо следующее

Следствие 5.4. *Если имеет место оценка* (5.1), *то справедлива и оценка*

$$|X(t)| \leqslant N_X e^{\beta t}, \quad N_X > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Из оценки (5.2) не вытекает оценка (5.1). Это показывает построенный в работе [3]

П р и м е р 5.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) + bx(t) - abx(t-h) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Легко убедиться, что $X(t) = \chi(t)e^{-bt}$ — фундаментальное решение этого уравнения, $C(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(t - jh - s)e^{-b(t-jh-s)}a^j$ — функция Коши. Непосредственный подсчет по направлению $s = 0$ в точках $t = kh$, $k \in \mathbb{N}_0$, приводит к равенствам $C(kh, 0) = Y(kh) = \frac{a^{k+1} - e^{-b(k+1)}}{a - e^{-b}}$. Очевидно, что при $a > 1$ и $b > 0$ функция Коши неограниченно растет, в то время как фундаментальное решение экспоненциально убывает.

Найдем условия, когда из оценки (5.2) следует оценка (5.1).

Следствие 5.5. *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$. *Для того чтобы оценки* (5.2) *и* (5.1) *выполнялись одновременно, необходимо и достаточно, чтобы общие нули функций* $1 - S(p)$ *и* $A(p)$ *лежали слева от прямой* $\operatorname{Re} p = \beta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.

3. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2007. № 7. С. 17-27.

4. *Соколов В.А.* Об устойчивости одного класса линейных уравнений нейтрального типа // Краевые задачи. Пермь: Перм. политех. ин-т, 1984. С. 60-63.

5. *Соколов В.А.* Экспоненциальная оценка матрицы Коши и устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа. Пермь: Перм. политех. ин-т, 1985. 21 с. Деп. ВИНИТИ. 11.04.85. № 2419.

6. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

8. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с.

9. *Маркушевич А.И.* Целые функции. М.: Наука, 1965. 108 с.

10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Баландин Антон Сергеевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, младший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Для цитирования: *Баландин А.С.* Об асимптотическом поведении фундаментального решения и функции Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 187–199. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION AND THE CAUCHY FUNCTION FOR NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolsky prospect, Perm 614990, Russian Federation
E-mail: balandin-anton@yandex.ru

Abstract. We consider a linear autonomous neutral functional differential equation. We obtain formulas relating the fundamental solution and the Cauchy function for this equation. On the basis of the formulas the asymptotic behavior of solutions of the equation is studied.
Keywords: functional differential equation; neutral equation; the fundamental solution; the Cauchy function; asymptotic behavior

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

2. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Solutions for Equations with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm National Research Polytechnic University, 2001, 230 p. (In Russian).

3. Balandin A.S., Malygina V.V. Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh uravneniyakh neytral'nogo tipa [On exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2007, no. 7, pp. 17-27. (In Russian).

4. Sokolov V.A. *Ob ustoychivosti odnogo klassa lineynykh uravneniy neytral'nogo tipa* [On stability of a class of linear equations of neutral type]. Kraevye zadachi [Boundary Value Problem], Perm, Perm National Research Polytechnic University, 1984, pp. 60-63. (In Russian).

5. Sokolov V.A. *Eksponentsial'naya otsenka matritsy Koshi i ustoychivost' odnogo klassa uravneniy neytral'nogo tipa* [Exponential Estimation of the Cauchy Matrix and Stability of a Class of Linear Equations of Neutral Type]. Perm, Perm National Research Polytechnic University 1985, 21 p. Dep. VINITI. 11.04.85. No. 2419. (In Russian).

6. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p. (In Russian).

7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 544 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

8. Levitan B.M., Zhikov V.V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost Periodic Functions and Differential Equations]. Moscow, Moscow State University Publ., 1978, 205 p. (In Russian).

9. Markushevich A.I. *Tselye funktsii* [Integer Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 108 p. (In Russian).

10. Lavrentev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of Theory of Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 688 p. (In Russian).

Received 19 March 2018
Reviewed 23 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

Balandin Anton Sergeevich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Junior researcher of Research Center «Functional Differential Equations», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

For citation: Balandin A.S. Ob asimptoticheskom povedenii fundamental'nogo resheniya i funktsii Koshi differentsial'nyh uravnenij nejtral'nogo tipa [On asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function for neutral differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 187–199. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199 (In Russian, Abstr. in Engl.).